

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

---

УДК 532.22

## СТАЦИОНАРНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ НА СВЕРХГИДРОФОБНОМ МАТЕРИАЛЕ

**М.А. Агеева**

**Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент С.А. Чивилихин**

В работе рассматриваются свойства супер-водоотталкивающей (сверхгидрофобной) поверхности и поведение жидкости на ней.

Сверхгидрофобная поверхность – это материал с текстурой из микро-/нано-шероховатостей, способных удерживать капли воды и препятствовать проникновению жидкости в материал (намоканию), а, следовательно, и обледенению. Такие материалы имели бы большое распространение в авиастроении, эксплуатации линий электропередач, производство самоочищающейся и супер-водоотталкивающей одежды и т.д.

Исследуется вопрос о конфигурации свободной поверхности жидкости на таком материале. В силу гидрофобности материала, между жидкостью и телом образуется воздушное пространство, которое характеризуется статическим краевым углом. Чем меньше этот угол, тем более ярко выражены сверхгидрофобные свойства материала.

Из этого проводится теоретическое исследование устойчивости такой стационарной конфигурации, т.е. насколько низко провисает капля жидкости, или когда сверхгидрофобный материал теряет свои свойства.

УДК 621.31

## РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРОВОДОВ ВЛЗ-10 кВ

**Е.С. Андреевков**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Научный руководитель – д.т.н., профессор В.П. Кавченков**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

При строительстве новых воздушных линий электропередач (ВЛ) напряжением 10 кВ в настоящее время применяются защищенные провода типа СИП-3, позволяющие значительно повысить надежность электроснабжения и снизить эксплуатационные издержки. Выбор сечения проводов при этом является оптимизационной задачей. Существующие методики выбора оптимальных сечений проводов не отвечают современным экономическим требованиям и не учитывают особенностей, свойственных изолированным проводам. В ходе исследования был произведен анализ зависимости технико-экономических показателей ВЛЗ-10 кВ от сечения проводов и разработана методика выбора оптимальных сечений. Решение задачи состояло из трех этапов: выбор критерия оптимальности, составление математической модели и отыскание метода ее реализации.

В качестве критерия выбора оптимальных сечений проводов ВЛЗ-10 кВ был выбран критерий минимума суммарных дисконтированных затрат, представляющий собой сумму капиталовложений и издержек за срок службы объекта, включающих возмещение потерь электроэнергии в сети, ущерб от недоотпуска электроэнергии и затраты на послеаварийное восстановление электроснабжения.

Для оценки капитальных вложений использовались государственные укрупненные нормативы цены строительства (НЦС) для ВЛЗ-10 кВ на железобетонных опорах, а так же данные сметных расчетов. Для упрощения записи при аппроксимации зависимости капиталовложений от сечения провода была выбрана степенная функция (в функции такого вида отсутствует постоянная составляющая, независимая от оптимизируемого параметра).

Для учета величины ущерба при повреждениях ВЛЗ-10 кВ и затрат на послеаварийное восстановление необходимым этапом исследований стало определение зависимости показателей надежности ВЛ от сечения провода.

С целью упрощения расчетов надежности, параметр потока отказов и его интенсивность были приняты равными удельной или относительной повреждаемости. Учитывая еще малую общую протяженность ВЛЗ, статистических данных недостаточно для определения зависимости между удельной повреждаемостью элементов линий и сечением проводов. Поэтому для определения удельной повреждаемости были применены расчетно-теоретические методы и соответствующие математические модели, учитывающие вероятностный характер гололедно-ветровых нагрузок. Для оценки надежности механической части ВЛ в гололедно-ветровых режимах был предложен обобщенный показатель – условная относительная повреждаемость опор (эквивалентная повреждаемость ВЛ), которая учитывает надежность опор и проводов, но отнесена к одной промежуточной опоре.

В условиях каждого района климатических условий (РКУ) были найдены зависимости эквивалентной повреждаемости от сечения проводов для ВЛ на железобетонных и деревянных опорах. Анализ полученных зависимостей показал, что они могут быть аппроксимированы степенной функцией.

Величина ущерба от недоотпуска электроэнергии, согласно общепринятому подходу, была определена произведением величины отключаемой мощности, времени перерыва (восстановления) электроснабжения и стоимости электроэнергии. Затраты на возмещение потерь электроэнергии в сети были рассчитаны исходя из величины потерь активной электроэнергии в линии и стоимости потерь. Дополнительные капиталовложения, необходимые при восстановлении электроснабжения определены произведением стоимости послеаварийного восстановления на эквивалентную повреждаемость линии.

В результате исследования влияния сечения проводов на технико-экономические показатели ВЛЗ-10 кВ была разработана модель затрат на строительство и эксплуатацию линии в расчете на 1 км. В полученную модель вошли величины, значения которых могут изменяться в широких пределах по районам страны в зависимости от уровня электропотребления, особенностей организации эксплуатации сетей, темпов роста нагрузок. К таким параметрам относятся: расчетная нагрузка ВЛ, время восстановления электроснабжения, средний удельный ущерб. Таким образом, поставленная задача оптимизации сечений решалась с учетом неполноты и неопределенности исходной информации.

В процессе анализа способов устранения неполноты и неопределенности исходной информации были рассмотрены различные методы. Для решения поставленной задачи был выбран метод районирования множества векторов состояния природы, в результате применения которого к реализации разработанной модели была разработана методика выбора оптимальных сечений проводов ВЛЗ-10кВ. Алгоритм выбора при этом содержит следующую последовательность действий:

1. оценка ожидаемых в течение расчетного периода границ интервалов неопределенности параметров, входящих в разработанную модель затрат;
2. определение границ интервалов неопределенности обобщенных параметров  $A$  и  $B$ ;
3. построение прямоугольника неопределенности в поле выбора сечения проводов.

Таким образом, при использовании метода районирования для оптимизации сечений проводов диапазон возможных значений разбивается на ряд областей, в каждой из которых наилучшим является одно из стандартных сечений.

Важной частью исследования стал анализ его чувствительности, основной целью которого является определение параметров и исходных данных, оказывающих наибольшее влияние на оптимальное решение задачи. Анализ выражений для обобщенных неопределенных факторов  $A$  и  $B$  показал, что наибольшее влияние на решение задачи оптимизации сечений проводов ВЛЗ-10 кВ оказывает частично неопределенный фактор  $T_m$  – годовое число часов использования максимальной нагрузки. Поэтому для повышения достоверности решения следует, прежде всего, привлечь дополнительную информацию о величине  $T_m$ .

Разработанная методика районирования позволяет с достаточной степенью простоты и наглядности определить оптимальные сечения проводов ВЛЗ-10 кВ по критерию минимума дисконтированных затрат на строительство и эксплуатацию в условиях неопределенности и неполноты исходной информации.

УДК 517.938

## **ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДЛЯ ЦЕПОЧКИ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ШАРООБРАЗНЫХ РЕЗОНАТОРОВ С Y-РАЗВЕТВЛЕНИЕМ**

**А.С. Аникевич**

**Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор И.Ю. Попов**

В настоящее время широко изучаются спектральные свойства систем в зависимости от их геометрии. В данной работе рассматривается спектральная задача для цепочки слабо связанных шарообразных резонаторов с «базовым» Y-разветвлением. Словосочетание «базовое Y-разветвление» следует понимать в том смысле, что рассматривается система, где для каждой из трех ветвей, ее образующих, можно провести оси, проходящие через центр каждого шара в ветви, и эти оси лежат в одной плоскости и образуют между собой углы в  $120^\circ$ . Основное внимание в этой работе уделяется доказательству существования отрицательных собственных значений оператора Лапласа в случае такой конфигурации цепи резонаторов. При этом изучается два случая соединения элементов цепи: в первом предполагается наличие  $\delta$ -образного потенциала интенсивности  $\alpha$  в точке соединения резонаторов, а во втором случае рассматривается  $\delta'$ -соединение.

Основной целью работы является доказательство существования отрицательных собственных значений у системы данной конфигурации при различных значениях константы связи  $\alpha$ , а также уточнение количества таких значений.

В данной работе проводится решение спектральной задачи для оператора, построенного с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов. В точке соединения резонаторов предполагается наличие точечного прокола. Вывод основного уравнения на дискретный спектр осуществляется с помощью метода матриц монодромии.

Основным результатом работы являются следующие теорема и утверждение:

**Теорема.** Система цепочек слабосвязанных резонаторов с «базовым» Y-разветвлением в случае наличия  $\delta$ -образного соединения в точках соединения резонаторов имеет не более одного отрицательного собственного значения.

**Утверждение.** Система цепочек слабосвязанных резонаторов с «базовым» Y-разветвлением в случае наличия  $\delta'$ -соединения в точках соединения резонаторов имеет не более восьми отрицательных собственных значений.

## **РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОДУГОВОЙ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ПЕЧИ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ**

**А.А. Арсеньева**

(Тульский государственный университет)

**Научный руководитель – к.т.н., профессор В.А. Ерофеев**

(Тульский государственный университет)

Проблемы отечественной металлургии требуют решения задач, направленных на разработку эффективных технических решений, поиск оптимальных режимов управления существующими процессами, а также создание принципиально новых технологий и конструкций агрегатов. Однако подобные экспериментальные работы связаны с большими затратами, так как для этого требуются большие объемы шихтовых материалов (от нескольких сотен тонн). Значительно менее затратным способом организации таких исследований является проведение экспериментов методом компьютерного моделирования.

В работе будет представлена математическая модель электродуговой сталеплавильной печи непрерывного действия.

Основным физико-химическим процессом при получении жидкого железа прямого восстановления из железной руды в дуговой сталеплавильной печи (ДСП) энергометаллургического комплекса непрерывного действия является химическая реакция восстановления железа из его оксида углеродом, протекающая с поглощением значительного количества теплоты. Источником теплоты, поддерживающим эту реакцию, является энергия электрических дуг и теплота химической реакции окисления углерода [1].

В ДСП энергометаллургического комплекса протекает гибридный процесс: одновременно с получением жидкого железа прямого восстановления осуществляется газификация угля оксидами железа и кислородом, подаваемым через фурмы ДСП на поверхность расплава. Процесс получения жидкого железа прямого восстановления непрерывный с циклическим выпуском расплава металла и шлака.

Конечной целью физико-математического моделирования гибридного процесса одновременного получения железа прямого восстановления и газификации углерода в ДСП является определение оптимального режима ведения данного процесса.

Критериями оценки качества процесса является термодинамическое состояние материалов в ДСП, их химический состав и стабильность массового потока генерируемого в ДСП монооксида углерода.

Гибридный процесс протекает во времени и пространстве, поэтому термодинамическое состояние непрерывно изменяется вследствие выделения теплоты электрической дугой и химическими реакциями. Химический состав также непостоянен вследствие протекающих реакций и подачи реагентов в ДСП. Процесс можно описать функциями распределения в пространстве печи и изменения во времени энтальпии и концентрации основных химических элементов, участвующих в процессе.

В ДСП энергометаллургического комплекса протекают явления, различные по физической сущности, поэтому пространство моделирования условно делится на несколько областей: угольных электродов; электрических дуг; оксида железа ( $Fe_2O_3$ ), угольного порошка; расплавленного шлака; расплава металла; футеровки печи.

Общим процессом для всех областей ДСП является термодинамический – процесс изменения энтальпии, температуры и состояния вещества под действием дуговых разрядов, химических реакций и теплопереноса. Химический состав в металлической и шлаковой ваннах изменяется по мере плавления материалов и ходе химических реакций.

Физико-математическое моделирование заключается в решении системы

дифференциальных уравнений энергии и массопереноса, начальные и граничные условия которых учитывают конструкцию ДСП и внешние воздействия на процесс [2]. Уравнение энергии должно учитывать явления конвективного и кондуктивного теплообмена между электрическими дугами, металлической ванной и стенками печи. Уравнения массопереноса описывают распределение концентрации химических элементов, которые поступают в металлическую и шлаковую ванны.

В ходе моделирования определяются текущие распределения по объему расплава интенсивности тепловыделения, энтальпии и температуры, скоростей движения расплава и концентрации веществ. Результаты моделирования представлены текущими распределениями по объему расплава: а) интенсивности объемного тепловыделения; б) энтальпии и температуры; в) плотности расплава; г) гравитационного давления; д) скоростей движения расплава в направлении каждой из координат; е) концентраций каждого из веществ.

Разработанная физико-математическая модель гибридного процесса получения жидкого железа прямого восстановления и газификации углерода в дуговой сталеплавильной электропечи энергометаллургического комплекса позволяет решить задачу оптимизации конструкции элементов ДСП и технологии ведения данного процесса. Оптимальную технологию исследуемого гибридного процесса можно обеспечить рационально выбирая программу подачи материалов в ДСП и изменения мощности электрических дуг по ходу процесса, так как скорость химического взаимодействия зависит от конструктивных характеристик систем подачи материалов в печь, а также от уровня расплава, количества подаваемого в ДСП кислорода и мощности электрических дуг.

#### **Литература**

1. Рябов А.В., Чуманов И.В. Современные способы выплавки стали в дуговых печах. – М.: Теплотехник, 2007. – 192 с.
2. Тихонов А.Н., Калько В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.

УДК 519.6

## **ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**С.А. Астафьев**

**Научный руководитель – д.т.н., профессор В.М. Мусалимов**

Наиболее перспективным при моделировании процесса распространения лесного пожара представляется использование двух подходов.

При вероятностном подходе прогноз контура и площади пожара к заданному моменту времени осуществляется на основе анализа вероятностей распространения огня через дискретные области и среднестатистических скоростей распространения фронта, флангов и тыла пожара в зависимости от скорости ветра [1].

В подходе с решением интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) теплопереноса осуществляется использование физических характеристик среды, для расчета параметров теплового потока в зависимости от местоположения относительно фронта пожара.

Тепловой поток, создаваемый низовым пожаром, поднимаясь по направлению ветра наклонно, подогревает кроны деревьев впереди фронта огня на значительном расстоянии, способствуя их воспламенению. Верховые пожары, выделяя большое количество теплоты, вызывают восходящие потоки нагретого воздуха и образуют конвективные колонки, которые

увеличивают приток воздуха в зону пожара и порождают ветер, который усиливает горение. Таким образом, низовой пожар стимулирует развитие верхового и наоборот [2].

**Целью работы** является решение интегро-дифференциального уравнения теплопереноса для применения его при моделировании процесса распространения лесного пожара. За основу было взято следующее ИДУ теплопереноса:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (v_w - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot (\mu \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\sin(\alpha)}{Fr} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \int_0^y \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \ln P}{\partial x} \cdot dy,$$

где  $x$  – пространственная координата в направлении перемещения кромки огня;  $y$  – координата, характеризующая высоту над поверхностью земли;  $v_w$  – безразмерная скорость внешнего потока (вдува);  $\mu=18,27 \cdot 10^{-6}$  (Па·с) – динамическая вязкость воздуха;  $\rho=1,2$  (кг/м<sup>3</sup>) – плотность воздуха;  $Fr$  – критерий Фруда;  $\alpha$  – угол между касательной к поверхности и горизонтальной плоскостью;  $P$  (Па) – давление.

Данное уравнение его автор (профессор Томского государственного университета А.М. Гришин) предложил в качестве математической модели стационарных двумерных квазиравновесных течений, описывающих процесс распространения лесного пожара [3].

Аналитическое решение выглядит достаточно громоздким, большое количество преобразований в процессе решения повышает вероятность ошибки. На современном этапе степень развития вычислительных систем позволяет произвести численное решение сложного ИДУ с использованием мощного пакета для математических расчетов такого, как MATLAB.

В качестве исходных данных условно было задано давление среды в зависимости от координат. Вид зависимости был выбран из предположения, что в зоне прогрева давление среды экспоненциально растет с увеличением высоты и расстояния от задней границы фронта пожара, и после достижения максимального значения давление вновь снижается до нормального значения.

В качестве начального условия (при  $x=0$ ) было принято экспоненциальное увеличение скорости теплового потока в зависимости от высоты – от нуля на поверхности земли до единичного значения на внешней границе пограничного слоя. В качестве нижнего граничного условия (при  $y=0$ ), принято нулевое значение скорости теплового потока. В качестве верхнего граничного условия (при  $y=y_{\max}$ ) было принято экспоненциальное уменьшение скорости теплового потока с увеличением расстояния от фронта пожара – от единичного значения при  $x=0$  до нуля при  $x=x_{\max}$ .

Вычисления производились методом последовательных приближений. На первом этапе решения исходное ИДУ было упрощено до параболического ДУ, путем исключения из него интегрального слагаемого, содержащего производную скорости теплового потока по координате  $x$ . В результате значение этого интеграла было рассчитано и использовано в последующей итерации и т.д.

Решение параболического ДУ в частных производных производилось в пакете MATLAB с использованием функции `pdepe`. Данный решатель преобразует уравнения в частных производных в набор обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с использованием дискретизации второго порядка точности. Интегрирование (ОДУ) осуществляется с использованием функции-решателя `ode15s`, который реализует адаптивный многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 5).

Таким образом, главной задачей при решении уравнения в пакете MATLAB является его адекватная запись в форме, предусмотренной в программном пакете: `sol=pdepe(m, @teplofun, @teplinit, @teplbound, y, x)`, где  $u=\text{sol}(:, :, 1)$  – искомая скорость теплового потока;  $m$  – параметр, соответствующий типу дифференциального уравнения (для параболического ДУ  $m=0$ ); `teplofun` – функция, определяющая компоненты решаемого дифференциального уравнения, приведенного к требуемому виду; `teplinit` – функция, определяющая начальные условия; `teplbound` – функция, определяющая граничные условия.

В первую очередь были рассчитаны частные производные давления по координатам  $x$  и  $y$  и интеграл, содержащий частную производную логарифма давления по координате  $x$ .

В результате были рассчитаны значения скорости теплового потока в зависимости от координат  $u(x, y)$  и частные производные скорости теплового потока по координатам  $x$  и  $y$ .

Затем были вычислены напряжения трения теплового потока на обтекаемой поверхности и на внешней границе пограничного слоя. С увеличением расстояния от фронта пожара напряжение трения теплового потока уменьшается, причем его резкое уменьшение в пределах фронта пожара далее сменяется на пологое, и напряжение трения стремится к нулевому значению. Физический смысл данного параметра в том, что при равенстве его нулю происходит отрыв теплового потока, что означает смену типов течения. Вместо течения типа «плюмаж» появляется конвективная колонка.

Таким образом, произведено решение ИДУ теплопереноса с условными значениями начальных и граничных условий. Удалось добиться устойчивого решения уравнения. Ход вычислений имеет графическую визуализацию.

Применяя в основе модели распространения ЛП уравнение теплопереноса, мы подходим к возможности прогнозирования эволюции пожара путем учета физических параметров окружающей среды. Напряжение трения теплового потока представляется в качестве параметра, используемого для предсказания развития ЛП во времени.

Далее необходимо согласование параметров модели с реальными условиями распространения огня путем исследований параметров пожаров и сопоставления параметров модели с данными других исследований и экспериментов.

#### **Литература**

1. Астафьев С. А., Лысенко Д. Ю., Широков А. С. Моделирование процесса распространения лесного пожара с применением теории перколяции // Изв. вузов. Приборостроение. – 2012. – № 6. – С. 70–74.
2. Воробьев Ю.Л., Акимов В.А., Соколов Ю.И. Лесные пожары на территории России: Состояние и проблемы / Под общ. ред. Ю. Л. Воробьева; МЧС России. – М.: ДЭКС-ПРЕСС, 2004. – 312 с.
3. Гришин А.М. Математические модели лесных пожаров. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. – 277 с.

УДК 57.086+517.9+532.5

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА И ФИКСАЦИИ МИКРОЧАСТИЦ В МИКРОФЛЮИДНЫХ ЧИПАХ С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ЛОВУШКАМИ**

**К.И. Белоусов, И.В. Кухтевич**

(Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики)

**Научные руководители: к.т.н., ст.н.с. А.А. Евстапов** (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Институт аналитического приборостроения РАН);

**д.ф.-м.н., вед.н.с. А.Л. Буляница** (Институт аналитического приборостроения РАН)

Применяя микрофлюидные технологии, можно создавать компактные аналитические устройства нового поколения с улучшенными характеристиками (уменьшенный расход реагентов, высокая селективность, высокая производительность анализа и т.д.) для фиксации и последующего исследования отдельных биологических микрочастиц (клеток, бактерий и т.д.) в биологии, медицине и фармакологии [1]. Одним из способов фиксации микрочастиц

является использование гидродинамических ловушек, в которых иммобилизация достигается за счет действия давления натекающего потока в одном направлении и реакции микроструктуры в другом. При этом необходимо обеспечить как захват частиц в ловушках, так и возможность их отвода для предотвращения засорения устройства. Перед созданием прототипов и экспериментальных образцов данных устройств, необходимым является проведение моделирования процессов массопереноса потоков вещества и фиксации микрочастиц в микрофлюидном чипе.

Настоящая работа проходила в два этапа. На первом этапе целью был выбор предпочтительной формы ловушки: С- или П-образной. Первая представляет собой вертикально ориентированный полый полуцилиндр. Вторая – параллелепипед с вертикальной прямоугольной выемкой. Также в ловушках имеются две щели для уменьшения гидродинамического сопротивления. На втором этапе проверялась эффективность предлагаемой топологии микрофлюидного чипа с массивом из девяти ловушек. В качестве параметра эффективности была выбрана вероятность захвата частицы в ловушке, напрямую с ней связанная. При этом в предположении равномерного распределения частиц по ширине канала, вероятность их попадания в ловушку можно выразить через величину диапазона начальных координат, при которых это происходит.

Достижение данных целей осуществлялось путем математического моделирования траектории движения частицы в зависимости от начального смещения относительно центральной оси канала, которое изменялось с шагом 0,5 мкм.

При этом ставились следующие задачи:

- получение траекторий движения частиц и оценка величины диапазонов попаданий;
- анализ полученных данных и определение факторов влияющих на эффективность гидродинамических ловушек;
- изменение положения ловушек с целью увеличения эффективности системы.

В качестве модели клетки использовалась сфера радиусом 20 мкм (схожая по размеру с клетками животного происхождения). Для исследования формы ловушки была выбрана топология, представляющая собой прямоугольный канал шириной 135 мкм, в центре которого располагалась ловушка одной из двух форм. Внутренний радиус С-образной ловушки составлял 12,5 мкм, внешний – 22,5 мкм. Ширина выемки П-образной ловушки – 25 мкм, глубина – 15 мкм, а получившаяся толщина стенок была равна 10 мкм. У обоих типов ловушек ширина протоков была по 5 мкм. В анализируемом массиве ловушки располагались в три ряда по две, три и четыре ловушки в шахматном порядке в расширяющемся под углом  $45^\circ$  канале с входным размером 100 мкм.

Моделирование потока жидкости осуществлялось с применением уравнения Навье-Стокса. Движение частицы происходило посредством деформирования сетки водного домена [2, 3]. На границе области, представляющей вход в канал задавались граничные условия, соответствующие ламинарному потоку параболического профиля со средней скоростью 100 мкм/с. Решение соответствующих уравнений проводилось методом конечных элементов с применением пакета программ COMSOL Multiphysics. При этом ставилась плоская (двумерная) пространственная задача, позволяющая получить представление о процессе движения частицы и, в тоже время, упростить моделирование.

В результате первого этапа работы было обнаружено, что траектория частицы в канале с П- и С-образной ловушкой не имеют различий. Для создания прототипа устройства была выбрана С-образная форма ловушки, как более технологичная.

Проверка эффективности массива ловушек показала, что для первого ряда ловушек захвата микрочастиц не происходит. Это вызвано тем, что поток жидкости обтекает их под углом и компенсации «сдвигающих» сил, характерной для симметричного профиля потока относительно оси симметрии ловушки, не происходит. Для центральной ловушки величина диапазона начальных координат, при которых происходит захват частицы, составила порядка 1 мкм. Для крайних же ловушек второго и третьего рядов фиксация частицы обнаружена



лишь при начальных смещениях относительно центра канала в 19,5 мкм и 25 мкм соответственно. Такое уменьшение вероятности попадания, кроме уже вышеназванной причины, вероятно, вызвано также взаимодействием частицы с другими ловушками, увеличивающим ее отклонение.

В качестве меры по улучшению системы, было предложено развернуть ловушки первого ряда так, чтобы образовался симметричный профиль потока, что было достигнуто при угле поворота в  $22,5^\circ$ . При этом ширина диапазона попаданий составила порядка 0,5 мкм.

В результате проделанной работы была доказана эффективность рассматриваемой топологии микрофлюидного чипа с гидродинамическими ловушками, и предложены методы ее улучшения, что позволяет перейти к выполнению следующего этапа проекта, непосредственно связанного с созданием экспериментальных образцов микрофлюидных чипов.

Работа проведена при поддержке: Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение №14.132.21.1777); Программы У.М.Н.И.К.

### **Литература**

1. Carlo D., Lee L. Dynamic single-cell analysis for quantitative biology // *Analytical Chemistry*. – 2006. – V. 1. – № 12. – P. 7918–7925.
2. *Encyclopedia of Computational Mechanics. Volume 1. Fundamentals* / Stein E., de Borst R., Hughes T.J.R.. Wiley John & Sons, 2004. – 798 p.
3. *Encyclopedia of Computational Mechanics. Volume 3. Fluids* / Stein E., de Borst R., Hughes T.J.R. Wiley John & Sons, 2004. – 672 p.

УДК 532.6

## **РАСЧЕТ ФОРМЫ МЕНИСКА В СОСУДАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

**С.О. Бызова**

**Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент С.А. Чивилихин**

В работе исследуется форма свободной поверхности жидкости в цилиндрических сосудах с произвольной формой поперечного сечения. Для сосудов, имеющих форму кругового цилиндра, конфигурация свободной поверхности хорошо изучена. Для сосудов произвольной формы общее решение отсутствует.

**Цель работы** – построение математической модели поведения формы поверхности жидкости в сосудах произвольной формы. Уравнение, описывающее форму свободной поверхности жидкости, выводится из требования баланса силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Это нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных имеет аналитическое решение лишь в некоторых специальных случаях. В частности, предположение о малом наклоне свободной границы позволяет свести нелинейное уравнение к линейному. Граничные условия определяются краевым углом между свободной поверхностью и стенкой сосуда.

Другим подходом к определению формы свободной поверхности является использование прямых вариационных методов. Суммарная потенциальная энергия системы, состоящая из энергии поверхностного натяжения и потенциальной энергии жидкости в поле тяжести, записывается в виде интеграла по поперечному сечению сосуда. Подынтегральная функция определяется формой свободной поверхности. Используя метод Ритца, введем аппроксимацию искомой функции в виде некоторой функции с неопределенными параметрами. Для определения этих параметров численно решается задача о минимизации функционала потенциальной энергии.

В работе построено общее описание формы свободной поверхности малого наклона в сосуде произвольной формы. В случае сосуда квадратного сечения получено явное выражение для формы свободной поверхности. Показано существенное повышение уровня жидкости в углах квадрата.

УДК 536.6

## **ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**

**Д.А. Гладских**

**Научный руководитель – д.т.н., профессор Н.В. Пилипенко**

Одним из важных теплоэнергетических показателей зданий и сооружений является сопротивление теплопередаче элементов ограждающих конструкций (ОК), в связи с тем, что от него зависят такие характеристики как благоприятный микроклимат зданий, тепловые потери в зимнее время, температура внутренней поверхности и влажностный режим ограждения и, в конечном счете, энергопотребление.

Для определения теплового сопротивления ОК принципиально возможно использовать два подхода: нестационарный и стационарный. Сильной стороной нестационарного подхода определения теплового сопротивления ОК является его относительная быстрота применения на практике (менее одного рабочего дня).

Поскольку температура внутри помещения поддерживается системой теплоснабжения практически постоянной, то на величину тепловых потерь существенно влияют внешние условия – коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности ОК и температура наружного воздуха. Термическое сопротивление ОК с изменением температуры внутренней поверхности стенки меняется незначительно и поэтому, если измерить температуру наружной поверхности ОК, то, рассчитав или измерив удельный тепловой поток через исследуемый участок ОК, можно вычислить термическое сопротивление рассматриваемого участка ОК.

Для описания динамики теплопереноса нами была использована дифференциально-разностная модель, в которой выполнена дискретизация пространства теплопереноса вдоль одной оси, а время оставлено непрерывным. Для решения задачи использовался метод параметрической идентификации на основе алгоритма оптимального цифрового фильтра Калмана. Данная методика детально описана в работах [1–3]. Однако нестационарная теплотерия ОК имеет ряд особенностей: характерные размеры исследуемого тела – десятки сантиметров, низкая скорость протекания процессов, малые величины измеряемых температур и рассчитываемых тепловых потоков, их медленное изменение во времени, большие интервалы между измерениями, а также длительное время эксперимента.

Приведенные особенности были учтены в предлагаемой математической модели и методе решения. Несмотря на то, что в ходе решения используется неявная разностная схема, решение становится неустойчивым при больших интервалах между измерениями из-за ошибок округления и недостаточной точности вычислений. Разработка иного алгоритма, искусственно уменьшающего этот интервал, позволила избавиться от этого ограничения. Для компенсации малого изменения граничных условий во времени был введен переменный шаг по времени измерения, величина которого зависела от скорости изменения граничных условий. Высокая инерционность процесса теплопереноса в ОК учтена в математической модели измерений.

Предложенный метод был реализован в пакете прикладных математических программ Scilab. Численные эксперименты показывают, что методическая погрешность восстановления граничных условий не превышает 3% при определении искомых параметров в реальном

масштабе времени.

Метод прошел многократную апробацию как для восстановления тепловых потоков, уточнения теплофизических свойств материалов, так и при разработке энергоресурсосберегающих технологий.

### **Литература**

1. Пилипенко Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотометрии. Часть 1 // Изв. вузов. Приборостроение. – 2003. – № 8. – Т. 46. – С. 50–54.
2. Пилипенко Н.В. Методы параметрической идентификации в нестационарной теплотометрии. Часть 2 // Изв. вузов. Приборостроение. – 2003. – № 10. – Т. 46. – С. 67–71.
3. Пилипенко Н.В., Гладских Д.А. Нестационарная теплотометрия зданий и сооружений // Изв. вузов. Приборостроение. – 2011. – Т. 54. – № 12. – С. 74–78.

УДК 621.316.82

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТЕНН ММАНА-GAL И.В. Егоренков**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Научный руководитель – к.т.н., доцент К.Н. Строев**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Целью работы** являлось создание средств подготовки расчетных моделей для программы анализа антенных систем ММАНА-GAL. Указанная программа получила широкое распространение среди разработчиков антенн благодаря высокой скорости расчетов, наличию бесплатной обычной и недорогой профессиональной версии.

Выяснено, что основной проблемой при практической работе с программой ММАНА-GAL является способ задания данных для последующего моделирования. Модель антенны создается в виде набора отрезков, для которых указываются начальные и конечные координаты. Эти координаты приходится рассчитывать и вводить вручную. В результате много времени непроизводительно затрачивается на создание, а, главное, на последующую правку модели антенны.

Для решения проблемы предлагается использовать созданное программное обеспечение – препроцессор, автоматизирующий расчет геометрии моделей. Разработка программы была проведена в среде Visual Studio 2010 с использованием языка C#. Исходным файлом для разработанного препроцессора являлся XML-файл, в котором описываются структура антенны в виде укрупненных элементов, а результирующим – файл программы ММАНА-GAL с расширением .таа.

Возможности созданного программного обеспечения позволяют: рассчитывать геометрию элементов антенн любой конфигурации с использованием переменных, копировать и поворачивать элементы, разбивать большие плоскости на мелкие элементы, строить сложные поверхности, например спиралевидные антенны по уравнению спирали. Работы над расширением функциональных возможностей программы и пополнением библиотеки укрупненных элементов продолжаются.

Таким образом, использование разработанного программного обеспечения упрощает и ускоряет работу пользователя с программой ММАНА-GAL, что приводит, в конечном счете, к получению антенн с лучшими характеристиками.

**ВОЗРАСТНАЯ СТРУКТУРА В МОДЕЛИ «ХИЩНИК–ЖЕРТВА»****М.О. Ковалева****Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент А.В. Норин**

**Краткое вступление, постановка проблемы.** На данный момент существует множество моделей, описывающих динамику численности особей в популяциях с типом взаимодействия «хищник–жертва», в основе которых лежит модель Лотки–Вольтерра. Однако при учете взаимодействия популяций вопрос о возрастной структуре приобретает немаловажное значение, так как влияет на суммарную рождаемость в популяции. Имеющиеся модели не позволяют получить и проанализировать возрастную структуру популяции хищников и жертв соответственно.

**Цель работы.** Разработать модель, позволяющую получить и проанализировать возрастную структуру двух популяций с типом взаимодействия «хищник–жертва».

**Базовые положения исследования.** Модель получена на основе принципов построения модели Лотки–Вольтерра:

- чем более многочисленны хищники, тем менее многочисленны жертвы, и наоборот;
- чем более многочисленны жертвы, тем более многочисленны хищники, так как увеличивается количество пищи для последних, и наоборот.

**Промежуточные результаты**

- Описаны основные формулы для разрабатываемой модели.
- На основе базовых положений и выведенных формул построена новая модель.
- С помощью конечно-разностного аналога построенной модели, на конкретных примерах, были проведены расчеты, в ходе которых была получена динамика численности особей обеих популяций, построен фазовый портрет системы.
- Также, с помощью этого же конечно-разностного аналога, на этих же примерах, была получена возрастная структура для хищников и жертв соответственно.

**Основной результат.** Разработана модель, позволяющая получить и проанализировать возрастную структуру популяций в модели «хищник–жертва», а также получить динамику численности популяций.

**МЕТОД ХАРТРИ-ФОКА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ В ДЕФОРМИРОВАННОМ НАНОСЛОЕ****И.Ф. Мелихов****Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор И.Ю. Попов**

В работе рассматривается проблема локализации и хранения квантовых частиц в деформированном волноводе. Исследования в данной области открывают новые возможности для безопасного хранения водорода в аккумуляторах, составленных из множества нанослоев. Также схожая технология может быть использована для реализации некоторых операций в квантовом компьютере, требующих локализации нескольких частиц в одной области пространства. С точки зрения математики, наличие подобного связного

состояния можно интерпретировать как существование квадратично интегрируемого решения уравнения Шредингера для системы частиц в волноводе.

В построенной модели рассматривается система из нескольких электронов с заданными спинами, взаимодействующих посредством дельта-потенциала, помещенных в двумерный деформированный волновод. Исследуются различные виды деформации волновода: волновод с локальным возмущением на одной из границ, два волновода, связанные друг с другом через окно, и изогнутый волновод. Для упрощения уравнения Шредингера для системы частиц используется метод Хартри-Фока, далее полученные уравнения решаются с помощью метода конечных элементов.

В ходе численного эксперимента была получена зависимость порогового значения геометрического параметра, сохраняющего при заданной силе дельта-взаимодействия связанное состояние системы, для различного числа частиц и их суммарного спина. Полученные результаты позволяют лучше понять механизм хранения частиц в деформированных нанослоях и возможность оптимальной физической реализации подобной системы.

УДК 537.6

## **МИКРОМАГНИТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКТИВАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ В НАНОСИСТЕМАХ**

**М.А. Москаленко**

**Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.М. Уздин**

Проблема описания устойчивости магнитных структур относительно внешних воздействий и температурных флуктуаций очень важна как для фундаментального магнетизма, так и для приложений. В устройствах магнитной памяти перемагничивание элементов должно происходить максимально быстро, а сами элементы должны иметь как можно меньший размер. С другой стороны их магнитные состояния должны быть устойчивы относительно случайных внешних воздействий и тепловых флуктуаций, что становится особенно важным при уменьшении размеров элементов до наномасштаба. Поэтому теоретическое исследование устойчивости магнитных микро и наноразмерных систем относительно активационных переходов, вызванных неконтролируемым тепловым взаимодействием и моделирование поведения магнитной структуры при конечных температурах является актуальным.

Активационные переходы можно исследовать путем прямого моделирования динамики магнитной системы при конечной температуре и подсчета количества траекторий, начинающихся в одном устойчивом состоянии и заканчивающихся в другом. Однако характерное время между переходами от одного метастабильного состояния к другому на много порядков больше времени осцилляций магнитных элементов около положения равновесия. Поэтому на временном масштабе периода осцилляций магнитных элементов переход между различными состояниями является чрезвычайно редким событием и стандартное моделирование таких процессов на этих временах не представляется возможным. Разделение временных масштабов осцилляций магнитных моментов около положения равновесия и собственно скачков между положениями равновесия дает возможность применить статистический подход, позволяющий исключить «быструю» динамику из прямого рассмотрения. Такой подход был предложен для оценки среднего времени жизни реагентов в химических реакциях и получил название теории переходного состояния (ТПС).

Недавно [1] была развита ТПС магнитной системы со многими степенями свободы, которая может быть использована для описания широкого класса магнитных систем. Для

использования этого теоретического подхода необходимо строить многомерную энергетическую поверхность системы как функцию параметров, задающих магнитную конфигурацию.

Активационным барьерам при переходе из одного состояния в другое соответствуют точки максимума на пути с минимальным перепадом энергии из начального состояния в конечное. На энергетической поверхности эти точки являются седловыми. Нахождение седловых точек в пространстве большой размерности – непростая задача. Для ее поиска используется метод, являющийся обобщением на магнитные системы метода «подталкивания упругой ленты» (Nudged Elastic Band) [2]. Метод предполагает создание между двумя состояниями, отвечающими минимумам энергии, цепочки промежуточных состояний, состоящих из образов магнитной системы в пространстве конфигурационных параметров (этими параметрами являются углы, задающие направления магнитных моментов в системе). Далее последовательными итерациями, минимизирующими действующие на цепочку силы, достигается конечное распределение образов системы. Это распределение дает дискретное представление пути с минимальным перепадом энергии.

При рассмотрении конкретных магнитных систем с характерными размерами от нано- до микрометров используют методы микромагнитного моделирования. Автором была разработана программа, которая позволяет не только находить основное и метастабильное состояния системы, но и строить многомерную энергетическую поверхность в пространстве параметров, задающих магнитные состояния, а также рассчитывать эффективные силы, описывающие эволюцию системы, выведенной из состояния равновесия. Это позволяет применить общую теорию и методы расчета путей с минимальным перепадом энергии и седловых точек на энергетической поверхности. В настоящей работе проведены расчеты конкретных магнитных систем с несколькими метастабильными состояниями и найдены активационные барьеры для магнитных переходов.

#### **Литература**

1. Bessarab P.F., Uzdin V.M., Jonsson H. Harmonic transition state theory of thermal spin transitions // *Physical Review B*. – 2012. – V. 85. – P. 184409.
2. Mills G. and Jonsson H. // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – V. 72. – P. 1124.

УДК 621.365.5

### **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ В ИНДУКЦИОННЫХ СИСТЕМАХ ДЛЯ НАГРЕВА ВРАЩЕНИЕМ**

**А.А. Муратов**

(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина))

**Научный руководитель – д.т.н., профессор Ю.И. Блинов**

(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина))

**Краткое вступление, постановка проблемы.** В настоящее время в установках для получения алюминиевого профиля широко используются индукционные нагреватели, которые предварительно нагревают алюминиевые заготовки перед этапом прессования. КПД обычного индукционного нагревателя не превышает 50–60%, потому что 40–50% всей мощности идет на нагрев медных витков и отводится водяным охлаждением. Потери мощности в катушке больше чем все остальные потери системы индукционного нагрева, поэтому уменьшение потерь в витках катушки это основной путь для увеличения суммарного КПД нагревателей алюминиевых заготовок.

**Цель работы.** Получение требуемого профиля температуры при нагреве вращением в постоянном магнитном поле.

**Базовые положения исследования.** В промышленности применяют различные технологии горячей обработки цветных металлов давлением. Одним из методов горячей обработки давлением является прессование профилей. Перед прессованием заготовку нагревают от комнатной температуры до 400–500°C, что способствует повышению пластичности металла, и, таким образом, облегчает процесс его обработки.

Обзор литературных источников показал, что в настоящее время возможно существенно повысить энергетическую эффективность процесса нагрева алюминиевых заготовок перед прессованием используя технологию нагрева заготовки вращением в поле постоянных магнитов. Метод основан на формировании магнитного поля постоянным током. Вращение заготовки в постоянном магнитном поле приводит к индукции вихревого тока и тепловой энергии в ней. Таким образом, практически вся механическая энергия электродвигателя преобразуется в тепловую энергию, которая выделяется в заготовке. Теоретически КПД индуктора должен приближаться к КПД электрического двигателя, который составляет 90%.

При термообработке изделия возникают температурные напряжения и деформации, величины которых могут оказаться за пределами упругости. Остаточные напряжения могут складываться с рабочими напряжениями и в сумме превышать значения предела прочности, что приводит к образованию трещин и разрушению изделий. Кроме того, растягивающие остаточные напряжения снижают износостойкость и стойкость к циклическим нагрузкам [1].

В этой связи, актуальной является задача изучения процессов, протекающих в системах нагрева алюминиевых заготовок вращением в поле постоянных магнитов, средств пространственного управления температурным полем, применение современных коммерческих пакетов, позволяющих моделировать электромагнитные и тепловые процессы при нагреве заготовок, а также поиск направлений оптимизации конструкций нагревателей.

На данный момент в мире уже существует несколько установок нагрева алюминиевых болванок вращением в поле постоянных магнитов. Но в них не предусмотрена и не заложена возможность внедрения средств пространственного управления температурным полем. Поэтому представленная работа является актуальной.

Средства пространственного управления температурным полем в нагреваемой заготовке можно разделить на две группы: пассивные и активные. К активным средствам относятся те, которые связаны с системами генерации электромагнитного поля, а к пассивным дополнительно вносимые в поле «посторонние» предметы. Это могут быть различные магнитные и ферромагнитные изделия различной геометрической формы.

Оптимальный процесс нагрева нуждается в точном проектировании индуктора или постоянных магнитов. Математическое моделирование является удобным инструментом для оптимального проектирования нагревателей и включает в себя преобразование инженерного описания проблемы в четкую математическую постановку, разработку модели, используя численный метод, например, метод конечных элементов, который обеспечивает приближенное решение.

Таким образом, электромагнитный и тепловой анализ индукционной системы для нагрева заготовки вращением в постоянном магнитном поле требует построения полной трехмерной численной модели, учитывающей скорость вращения и все нелинейные физические свойства материалов. Универсальный коммерческий пакет ANSYS имеет хорошие возможности для проведения электромагнитного и теплового расчета, включающего вращение заготовки [2].

**Промежуточные результаты.** При исследовании влияния средств управления температурным полем в нагреваемой заготовке, работа была разбита на два этапа. На первом

этапе, при помощи средств численного моделирования, исследовалась возможность создания однородного магнитного поля, в котором вращается нагреваемая заготовка. На втором этапе исследовалось влияние пассивных средств вносимых в электромагнитное поле на распределение температуры в нагреваемой алюминиевой заготовке.

Как показали исследования, температурное поле вращательной симметрии будет окончательно сформировано только за счет вращения заготовки. В этом случае важность краевых эффектов в заготовке становится очень высокой [3].

**Основной результат.** Для электромагнитного и теплового анализа индукционных систем нагрева заготовок вращением в постоянном магнитном поле была создана трехмерная численная модель, включающая скорость вращения и все нелинейные физические свойства материалов. Полученные результаты показывают, что температурное поле может быть сильно неоднородным по длине заготовки. При рассмотрении электромагнитных краевых эффектов индукционных систем результаты говорят о перегреве концов заготовки. Проектирование индукторов с постоянным током – очень трудная задача для адаптации к требуемому нагреву. Поэтому, с целью получения требуемого температурного профиля в заготовке, на стадии проектирования индуктора должны быть рассмотрены независимые измерения.

### **Литература**

1. Nacke B., Zlobina M., Nikanorov A., Ulferts A. Numerical simulation of induction heating of aluminium billets by rotation in DC magnetic field // Proceedings of International Symposium on Heating by Electromagnetic Sources, Padua. – 2007. – P. 497–504.
2. Блинов Ю.И., Галунин С.А., Никаноров А.Н., Муратов А.А., Орлов А.С. Численные средства для оптимизации установок индукционного нагрева // Индукционный нагрев. – 2011. – № 3. – С. 11–15.
3. Галунин С.А., Никаноров А.Н., Муратов А.А., Блинов Ю.И., Орлов А.С. Исследование методов управления температурным полем в системах нагрева алюминия перед прессованием // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2012. – № 9. – С. 87–93.

УДК 621.382.049.77

## **СПОСОБ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ**

**Е.В. Найдёнов**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Научный руководитель – к.т.н., доцент А.А. Пеньков**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

Системы управления импульсными источниками питания, построенные на основе цифровой схмотехники, позволяют использовать сложные и оригинальные алгоритмы управления, которые имеют существенные преимущества перед традиционными аналоговыми решениями. Реализация перспективных алгоритмов управления стала возможна при использовании современной элементной базы специализированных микросхем для управления преобразовательными устройствами. Среди них наиболее широкое применение имеют цифроаналоговые программируемые логические интегральные схемы (ЦАПЛИС) и цифровые сигнальные микроконтроллеры (ЦСМК).

Одной из проблем при разработке современных цифровых систем управления остается задача моделирования и отладки алгоритма их работы. В библиотеках элементов популярных систем автоматизированного проектирования (САПР) не имеется моделей специализированной компонентной базы для проектирования преобразовательных устройств



с цифровой системой управления (ЦСУ). Исключение составляют САПР фирм-производителей, но их возможности весьма ограничены. Такие системы часто носят исключительно демонстрационный характер и не позволяют добавлять элементы силовой электроники для построения законченных моделей преобразователей. В связи с этим, задача разработки таких моделей является актуальной.

**Целью работы** является разработка способа разработки моделей преобразовательных устройств с цифровой системой управления.

Базовыми положениями исследования являются: анализ различных типов САПР (математических, физического моделирования, схмотехнических) на возможность моделирования ЦСУ, а также разработка универсальной системы интеграции различных САПР в интересах создания моделей преобразовательных устройств с ЦСУ.

Промежуточными результатами при написании работы являются:

- подробные исследования внутренней архитектуры существующих типов специализированных микросхем для цифрового управления электропитанием преобразовательных устройств;
- исследования возможностей интеграции различных типов САПР для разработки единой модели преобразовательного устройства состоящего из силовой и цифровой части.

Основным результатом работы является разработка способа интеграции математических и схмотехнических САПР для создания универсальной среды моделирования преобразовательных устройств с ЦСУ. На основе разработанного способа были составлены алгоритмы синтеза моделей различных типов микросхем из специализированной элементной базы.

Практическим результатом является создание модели преобразовательного устройства на основе разработанного способа. Она включает в себя модель микросхемы ZL6105 для цифрового управления электропитанием, созданную средствами среды математического моделирования Matlab&Simulink R2012b, а также интеграцию модели силовой части, построенную в схмотехническом САПР Cadence OrCAD 16.6.

УДК 621.382.2/3

## **ОПТИМИЗИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ТАКТОВОГО ГЕНЕРАТОРА**

**К.Г. Пульнова, Е.А. Никерова**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Научный руководитель – к.т.н., доцент М.А. Амелина**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

Математическое моделирование с использованием специализированных программ схмотехнического анализа (PSpice, Orcad, Micro-cap, Multisim и др.) уже стало типовым этапом проектирования электронных устройств. Однако задача создание адекватных моделей электронных компонентов до сих пор является актуальной. В частности, достаточно серьезные проблемы возникают при построении Spice-моделей ШИМ-контроллеров [1]. Это связано с тем, что в схеме, использующей такой контроллер, постоянные времени, а также величины токов и напряжений могут отличаться на 6–9 порядков. Причем важной является информация как о быстрых процессах, так и о медленных. Поэтому к шагу расчета вычислительного алгоритма в таких системах предъявляются противоречивые требования. С одной стороны, он должен обеспечивать точность расчета быстротекущих процессов коммутации, с другой – обеспечивать приемлемое суммарное время расчета.

Стандартные алгоритмы численных методов автоматически меняют шаг для обеспечения оптимального времени расчета при заданной точности. Но при этом может нарушиться алгоритм функционирования устройства: из-за слишком большого шага

пропускаются условия возникновения того или иного события. Поэтому приходится ограничивать максимальный шаг расчета, что существенно увеличивает время вычислений.

Характерным примером возникновения ошибки при использовании алгоритма с автоматически изменяемым шагом являются результаты моделирования генератора пилообразного напряжения – типового задающего генератора для моделей ШИМ-контроллеров. Простая и быстро работающая модель такого устройства состоит из источника тока, заряжающего конденсатор, и управляемого гистерезисного разрядного ключа. При искусственном ограничении максимального шага расчета получается стабильно работающий генератор пилообразного напряжения. Однако при отсутствии ограничения шага в такой схеме происходят сбои. Это связано с тем, что на спадающем участке выходного напряжения генератора шаг расчета оказывается слишком велик, расчетных точек очень мало и условие выключения ключа (достижение напряжением нулевого значения) не может отслеживаться с высокой точностью. В результате этого ключ срабатывает не при нулевом напряжении, а в следующей расчетной точке после достижения напряжением на конденсаторе нулевого значения. В результате заряд конденсатора начинается именно с этого отрицательного значения (а не от нуля), что приводит к незапланированному увеличению периода следования импульсов, а, следовательно, к их нестабильности.

Для того, чтобы устранить эту проблему, необходимо использовать нелинейный резистор в разрядной цепи. В этом случае программа автоматически уменьшает шаг на критически важных участках. Расчетных точек на этих участках становится значительно больше.

В результате точно отслеживается условие переключения и генератор с нелинейным разрядным элементом стабильно работает без принудительного ограничения шага расчета. Это способствует тому, что суммарное время расчета с использованием оптимизированной модели оказывается в разы меньше, чем в случае использования исходной модели.

Пример моделирования задающего генератора показывает, что при разработке моделей ШИМ-контроллеров следует особое внимание уделять оптимизации любых, даже самых простых функциональных узлов. Только такой подход позволяет получить модели, стабильно работающие в составе сложных схем преобразовательных устройств. Рассмотренные принципы были положены в основу разработанной авторами модели ШИМ-контроллера TL494 для программы Micro-Cap, которая включена ее разработчиками (фирма Spectrum Software) в состав библиотеки моделей.

### **Литература**

1. Christophe P. Basso. Switch-Mode Power Supplies: SPICE Simulations and Practical Designs. McGraw-Hill Copyright. – 2008. – 889 p.

УДК532.5.032

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В КАВИТАЦИОННОМ ПУЗЫРЬКЕ**

**П.А. Павутец**

**Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент С.А. Чивилихин**

В работе исследуется процесс роста и сжатия кавитационного пузырька в поле ультразвуковой волны и химические реакции, происходящие в пузырьке во время этого процесса.

Кавитация – процесс роста и схлопывания пузырьков газа в жидкости под действием переменного давления. Источником такого переменного давления может быть ультразвуковая волна, распространяющаяся в жидкости.

На стадии роста пузырька в него проникают пары жидкости за счет испарения с поверхности пузырька. На стадии сжатия, газ внутри пузырька адиабатически нагревается. При этом в парах жидкости происходят химические реакции. Продукты реакции проникают в жидкость за счет конденсации на поверхности пузырька. Эти продукты реакции влияют на химические процессы, происходящие в жидкости. В частности, учет такого рода эффектов важен при исследовании гидротермального синтеза наночастиц и нанотрубок. Исследование влияния ультразвуковой кавитации на гидротермальный синтез является прикладной целью настоящей работы.

В работе исследуется кинетика четырех реакций, происходящих в парах воды за счет нагрева в кавитационном пузырьке.

Для моделирования использовался пакет Mathematica. С помощью дифференциального уравнения динамики пузырька была получена зависимость радиуса пузырька от времени. Исходя из предположения об изоэнтропийности сжатия газа в пузырьке, получена зависимость температуры в пузырьке от времени. Изменение состава многокомпонентного газа в пузырьке рассчитывается, исходя из системы дифференциальных уравнений химической кинетики. Система интегрируется численно, с учетом полученной зависимости температуры в пузырьке от времени.

Результатом работы является зависимость количества продуктов реакции от характеристик ультразвуковой волны.

УДК 621.382.2/3

## **МАКРОМОДЕЛЬ ДАТЧИКА ТОКА НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА ДЛЯ ПРОГРАММЫ MICRO-CAP**

**К.Г. Пульнова**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Научный руководитель – к.т.н., доцент М.А. Амелина**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

При проведении схемотехнического моделирования устройств преобразовательной техники, использующих датчики тока, важным критерием является соответствие полученных результатов характеристикам реальных преобразователей.

Одним из способов измерения тока является использование датчиков тока на основе эффекта Холла. От этих датчиков, как и от любых измерительных устройств, требуется высокая точность. Поэтому при создании макромоделей указанных датчиков следует учитывать их основные характеристики.

В настоящее время в библиотеке программы схемотехнического моделирования Micro-Cap отсутствуют модели датчиков тока на основе эффекта Холла. Поэтому их создание является актуальной задачей.

Для измерения постоянных и переменных токов до 50 А в диапазоне частот до 100 кГц серийно выпускаются датчики тока в интегральном исполнении.

В работе рассмотрены результаты создания макромоделей датчиков тока на основе эффекта Холла для программы схемотехнического моделирования Micro-Cap.

Интегральный датчик тока CSA-1V компании Sentron является линейным датчиком Холла, предназначенным для измерения постоянного и переменного (до 100 кГц) тока. Измерение производится во внешнем проводнике. Микросхема интегрального датчика ACS712 состоит из прецизионного линейного датчика Холла с малым напряжением смещения и медного проводника, проходящего у поверхности чипа и выполняющего роль сигнального пути для тока. Ток, протекающий через этот проводник, создает магнитное поле, воспринимаемое встроенным в кристалл элементом Холла.

Практически полезные свойства упрощенной структуры определяются тремя основными характеристиками такого датчика:

- передаточной характеристикой, включая ограничение выходного напряжения при превышении током допустимого значения (насыщение датчика);
- временной характеристикой датчика (реакцией на скачок тока);
- частотной характеристикой (зависимостью коэффициента передачи от частоты).

С точки зрения реализации основных функций датчика структуры микросхем CSA-1V имеют ACS712 идентичную внутреннюю структуру, что позволило создать для них общую математическую модель, содержащую блоки для формирования линейной передаточной характеристики с заданным уровнем ограничения, блок формирования задержки распространения сигнала и инерционное звено, моделирующее выходной фильтр. В качестве исходных данных для определения параметров блоков использована техническая документация на микросхемы.

Результаты расчетов с использованием построенной модели достаточно точно совпали с экспериментальными результатами. При моделировании работы датчиков суммарное время отклика (складывающееся из 3 мкс задержки включения из-за обработки сигнала датчиком Холла и из 3-х мкс времени нарастания переднего фронта выходного усилителя) составило 6 мкс, что соответствует паспортным данным на микросхему. При этом полоса пропускания составила 100 кГц, что также полностью соответствует техническим характеристикам, заявленным производителем.

Переходная характеристика датчика ACS712 несколько отличается от характеристики CSA-1V на этапе задержки – появляется небольшой отрицательный выброс напряжения. Но разработанная макромодель способна реализовать такую характеристику при некотором изменении параметров входящих в нее звеньев. Результаты расчетов с использованием представленной выше модели также совпали с экспериментальными результатами. Полоса пропускания составила 80 кГц, что полностью соответствует техническим характеристикам, заявленным производителем.

Совпадение характеристик, полученных в модели, с экспериментальными данными, указанными производителем, свидетельствует о том, что разработанные модели адекватно отражают поведение датчиков тока и пригодны для моделирования использующих их электронных устройств. Обе модели оформлены в виде макросов Micro-Cap и подсхем Spice, что позволяет применять разработанные модели во всех программах схемотехнического анализа, использующих язык PSpice.

### **Литература**

1. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 464 с.

УДК 517.938

## **СТОКСОВО ТЕЧЕНИЕ В НАНОТРУБКЕ, ВЫЗВАННОЕ ЛОКАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ В ЕЕ СТЕНКЕ**

**О.А. Родыгина**

**Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор И.Ю. Попов**

Течения в нанотрубках очень специфичны и сильно отличаются от классических. Теория таких течений еще не разработана. Имеется ряд моделей, объясняющих некоторые свойства нанотечений. В случае узких нанотрубок с упругими стенками (например, углеродных) наблюдаются упругие волны (в частности, солитоны) в стенках трубки. Это может оказывать сильное влияние на течение. В настоящей работе предлагается явно

решаемая модель такого течения. Геометрически, солитон выглядит как локальное расширение или сужение трубки, движущееся с некоторой скоростью. Это движение вызывает движение жидкости в окрестности солитона.

Для описания данного течения мы предлагаем модель, в которой рассматриваем локальное возмущение границы. Стоксовы течения с точечными возмущениями (стокслетами, ротлетами и т.п.) рассматриваются во многих работах. Математическую основу такой модели дает теория самосопряженных расширений симметрических операторов.

Рассматривается осесимметричное стоксово течение в цилиндре. Такое течение описывается с помощью функции тока, удовлетворяющей некоторому уравнению. Что касается граничного условия, более удобно рассматривать эквивалентную задачу с движущейся границей и покоящейся сингулярностью. В этом случае граничное значение нормальной производной функции тока ненулевое (оно равно скорости стенки).

Показано, что модель является весьма эффективным инструментом для описания течений, порожденных солитоном.

УДК 519.6

## АЛГОРИТМЫ СГЛАЖИВАНИЯ НА БАЗЕ ОБОБЩЕННЫХ СРЕДНИХ В. А. СТЕКЛОВА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ В УЗЛАХ

Е.И. Сергеева

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент Г.Ю. Пуеров

В данной работе рассматривается следующая задача. По известным данным в произвольных точках (узлах) заданной области требуется построить гладкую функцию, восстанавливающую данные в других точках этой области. Узлы могут располагаться в этой области произвольно или регулярно. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда узлы расположены на прямоугольной равномерной сетке.

Пусть задан прямоугольник  $\Pi$ . Стороны прямоугольника разбиваются на равные части с шагами  $h_1$  и  $h_2$  по каждой стороне соответственно. Обозначим  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ . Узлы равномерной сетки задаются следующим образом:  $\{u^{(l)} = (l_1 h_1, l_2 h_2)\}$ , где  $l_i$  целые числа,  $l = (l_1, l_2)$ . В точках  $u^{(l)}$  известны значения функции  $f$ . Требуется найти гладкую на  $\Pi$  функцию  $g$  «хорошо» аппроксимирующую  $f$ .

Составной частью решения данной задачи является операция сглаживания. В работе [1] сглаживание осуществляется с помощью средних В.А. Стеклова  $S_{\mathbf{h},r}$  порядка  $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$  с шагом  $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ . Важнейшим обстоятельством данного подхода является то, что все операции удается осуществить в конечной форме, не прибегая к приближенным методам.

Развивая данный в [1] подход, для выполнения операции сглаживания в работе [2] предложено использовать следующее обобщение средних В.А. Стеклова

$$S_{\mathbf{h},r,m}(f) = (E - (E - S_{\mathbf{h},r})^m)(f),$$

где  $E$  – тождественный оператор,  $m \in \mathbb{N}$ . В работе [3] приведена оценка отклонений обобщенных средних В.А. Стеклова.

Разработан алгоритм сглаживания с использованием обобщенных средних В.А. Стеклова, что позволяет получить более высокую точность аппроксимации и при этом сохранить вычислительную эффективность алгоритма.

Произведено компьютерное моделирование и анализ результатов работы предложенных алгоритмов.

### Литература

1. Жук В.В. Методические указания к курсу «Теория аппроксимации функций и ее

- приложения». Часть 2. – СПб: СПбГУ, 1993. – 41 с.
2. Пуеров Г.Ю., Сергеева Е.И. Обобщенные средние В.А. Стеклова в задаче восстановления данных по значениям в узлах равномерной сетки // Труды XI всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – СПб: Наука, 2012. – С. 318–319.
  3. Пуеров Г.Ю., Сергеева Е.И. Оценка отклонений обобщенных средних В.А. Стеклова гладких функций двух переменных // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула, 2012. – С. 67–69.

УДК 536.629.7

## **СВЯЗЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА И ПОГРЕШНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ**

**И.А. Сиваков**

**Научный руководитель – д.т.н., профессор Н.В. Пилипенко**

Одна из наиболее сложных и актуальных задач при исследовании энергоемких процессов – определение нестационарных условий теплообмена с помощью приемников теплового потока (ПТП) по измеренным в них температурам или их разностям в отдельных точках. При этом остро встает вопрос оценки погрешности восстановления теплового потока  $q(\tau)$ .

Принципиальной особенностью нестационарной теплотметрии является то, что в общем случае приходится преодолевать тепловую инерционность ПТП расчетным путем. Возникающие при этом погрешности могут быть отнесены к основным погрешностям нестационарной теплотметрии. Они являются весьма существенными, а иногда и определяющими. Сложности устранения и оценивания основных погрешностей определяются следующими обстоятельствами:

- задача восстановления  $q(\tau)$  относится к некорректно поставленным обратным задачам теплопроводности (ОЗТ) и ее решение существенно влияет на погрешность нестационарной теплотметрии;
- дополнительные сложности связаны с функционированием ПТП как автономного средства измерений, длительно работающего в режиме реального времени. Это выдвигает требования высокой вычислительной эффективности алгоритмов восстановления  $q(\tau)$  при сохранении их достаточной точности, а также наличия информации о моменте начала воздействия теплового потока на рабочую поверхность ПТП.

**Базовые положения исследования.** В работе рассмотрен общий применительно к различным ПТП приближенный метод учета и априорного анализа основных методических погрешностей нестационарной теплотметрии, при использовании для восстановления  $q(\tau)$  метода параметрической идентификации дифференциально-разностных моделей (ДРМ) теплопереноса в ПТП.

Метод основан на обращении матрицы Грама (информационной матрицы Фишера) (1), составляющими которой являются функции чувствительности (2) измеряемых температур в ПТП или их перепадов к искомым параметрам кусочно-линейной аппроксимации  $q(\tau)$ .

$$A_i = \Phi = \begin{vmatrix} \sum_i \sum_k U_{ik}^2 & \sum_i \sum_k U_{i2k} \cdot U_{i1k} & \dots & \sum_i \sum_k U_{irk} \cdot U_{i1k} \\ \sum_i \sum_k U_{i1k} \cdot U_{i2k} & \sum_i \sum_k U_{i2k}^2 & \dots & \sum_i \sum_k U_{irk} \cdot U_{i2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i \sum_k U_{i1k} \cdot U_{irk} & \sum_i \sum_k U_{i2k} \cdot U_{irk} & \dots & \sum_i \sum_k U_{irk}^2 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$U_{ijk} = \frac{\partial}{\partial q_j} y_i(\hat{Q}_N). \quad (2)$$

Данный метод позволяет учесть определяющую погрешность параметрической идентификации, вызываемую взаимным влиянием шума в исходных измерениях и топологией функции невязки  $\Phi(\mathbf{Q})$  в пространстве искомых параметров.

### Промежуточные результаты

1. Исследована структура методической погрешности нестационарной теплотметрии при параметрической идентификации.
2. Рассмотрен метод учета и априорного анализа основных методических погрешностей нестационарной теплотметрии, основанный на обращении информационной матрицы Фишера, при использовании для восстановления  $q(\tau)$  метода параметрической идентификации.
3. Получены результаты имитационного моделирования в различных условиях эксплуатации при различных уровнях шумов в измерениях для различных видов датчиков.
4. Рассмотрены алгоритмы построения совместных доверительных областей (СДО) в пространстве искомых параметров  $q_i$  в форме гиперэллипсоида рассеивания и совместных доверительных интервалов (СДИ) в форме проекций гиперэллипсоида на оси параметров  $q_i$ .

**Основные результаты работы.** Показано, что на основе информационной матрицы Фишера можно построить совместные доверительные области (СДО) или интервалы (СДИ), в которые с заданной доверительной вероятностью попадают получаемые на каждом участке оценки, аппроксимирующие  $q(\tau)$  и которые, как известно, являются нормативными показателями погрешностей косвенных измерений.

В качестве иллюстрации возможностей предложенного метода и его применимости к нестационарной теплотметрии приведены результат решения граничной обратной задачи теплопроводности для различных видов датчиков при различном уровне шумов в измерениях.

УДК 517.938

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ШУМ ПРИ ФАЗОВОМ КОДИРОВАНИИ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

А.А. Сотникова

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Г.П. Мирошниченко

Большинство существующих систем квантового распределения ключа базируются на поляризационном [1] или фазовом кодировании информационных носителей [2]. Основная проблема схем поляризационного кодирования – нестабильность при передаче по оптическому волокну (ОВ), возникающая из-за случайного двулучепреломления и поляризационной модовой дисперсии. Системы, использующие двойной интерферометр

Маха-Цендера с фазовым кодированием и временным мультиплексированием, считаются более устойчивыми. В [3] показано, что если обеспечить одинаковые поляризационные условия в двух плечах каждого интерферометра, система квантового распределения ключей будет свободна от изменения поляризации. Делаются допущения – исключаются потери в ОВ и несовершенства аппаратуры, этот прогноз доказывается для эксперимента на расстояние более чем 125 км. В работе изучаются ошибки, возникающие при фазовом кодировании информации от поглощения и поляризационно зависящей декогеренции в ОВ.

### **Литература**

1. Muller A., Zbinden H. and Gisin N. Quantum cryptography over 23 km in installed under-lake telecom fiber // *Europhys. Lett.* – 1995. – V. 33. – P. 335–339.
2. Bennett C.H. Quantum cryptography using any two non-orthogonal states // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – V. 68. – P. 3121–3124.
3. Zheng-Fu Han, Xiao-Fan Mo, You-Zhen Gui, and Guang-Can Guo. Stability of phase-modulated quantum key distribution systems // *Applied Physics Letters.* – 2005. – V. 86. – P. 221103.

УДК 621.382.2/3

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОКА ПОТРЕБЛЕНИЯ ПО ЦЕПИ ПИТАНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО УСИЛИТЕЛЯ В ПРОГРАММЕ MICRO-CAP**

**Е.О. Фоменкова**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

**Научный руководитель – к.т.н., доцент М.А. Амелина**

(Московский энергетический институт (технический университет) филиал в г. Смоленске)

При моделировании устройств в различных программах схемотехнического анализа важным критерием является их точность и многофункциональность. Операционный усилитель (ОУ) является базовым активным компонентом низкочастотной аналоговой схемотехники, и естественно, что наличие в базе данных САПР качественных макромоделей, точно отражающих характеристики реальных ОУ, особенно актуально. Однако рассматриваемые макромодели ОУ имеют некоторые особенности и недостатки, которые необходимо учитывать в процессе моделирования. По этой причине результаты моделирования некоторых схем, в состав которых входят ОУ, оказываются некорректными.

В моделях ОУ, представленных в программе схемотехнического анализа Micro-cap, отсутствует моделирование токов потребления по цепи питания. Соответственно, данные модели не пригодны для анализа схем с нестандартным включением ОУ.

**Целью работы** является исследование существующих моделей ОУ и их усовершенствование для моделирования токов потребления по цепи питания.

Для операционного усилителя существуют модели 3-х уровней [1]. Каждый следующий уровень представляет собой более точную модель благодаря использованию более сложной эквивалентной схемы.

Модель 1-го уровня представляет собой управляемый напряжением источник тока с ограниченным выходным сопротивлением.

Модель 2-го уровня состоит из трех частей, имеет 2 полюса и ограничение скорости нарастания, конечные коэффициент усиления и выходное сопротивление.

Модель 3-го уровня – это усовершенствованная модель Бойля, подобная модели используемой в других SPICE программах в виде подсхемы. Она, однако, не является макроопределением или подсхемой, а является полноценной встроенной в Micro-Cap моделью операционного усилителя. Она моделирует ограничение скорости нарастания и



спада выходного напряжения, ограничение коэффициента передачи, выходное сопротивление на постоянном и переменном токе, напряжения и токи смещения нуля, фазовые сдвиги, полосу пропускания, 3 вида дифференциальных входов, ограничение выходного напряжения и ограничение тока.

В модели 3-го уровня выводы питания соединены между собой резистором. Ток, протекающий через него, постоянен и никак не связан с выходным током. Т.е. данная модель не отражает реальной зависимости тока в цепи питания от тока нагрузки.

Данный недостаток устраняется введением в цепь питания уже существующих моделей ОУ управляемых источников тока, которые будут отслеживать ток в выходной цепи. Зависимые источники должны моделировать соответственно отрицательную и положительную часть выходного тока ОУ.

Для проверки данного эффекта было произведено сравнение усовершенствованной модели 3-го уровня (макромодели Бойля) и схемы, дублирующей внутреннюю структуру операционного усилителя  $\mu A741$ , в программе схемотехнического анализа Micro-cap.

Результаты, полученные в ходе сравнения двух моделей, хорошо согласуются между собой: зависимости токов потребления для 2-х моделей практически совпадают. Таким образом, введенное усовершенствование доказывает свою эффективность, является простым, точным и универсальным для всех рассмотренных ранее моделей ОУ.

### **Литература**

1. Амелина М.А., Амелин С.А. Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 464 с.

УДК 004.932

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАТОРА ГРАДИЕНТОВ В ЦЕЛЯХ ПОИСКА ИНФОРМАТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ СКАНИРУЮЩЕГО ОКНА ПРИ ПОСТРОЕНИИ КАРТ ДИСПАРАТНОСТИ**

**А.Н. Волкович**

(Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси)

**Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор А.В. Тузиков**

(Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси)

Исследования в области компьютерного стереовидения были начаты в середине 90-х годов XX-века. Наиболее сложным направлением является восстановление трехмерных моделей объектов на основе стереоизображений. Наиболее трудоемким и сложным этапом этого процесса является построение карт диспаратности. В мировой практике выработан ряд методов построения плотных карт диспаратности которые условно делятся на локальные и глобальные. Глобальные методы позволяют получить достаточно адекватную карту диспаратности, но при требуют значительных затрат машинного времени, а локальные методы, обладая хорошим потенциалом использования на параллельных вычислителях (MPI, GPGPU), чувствительны к однородным областям изображений, на которых результат вычисления диспаратности дает значительные ошибки. Отсюда очевидно возникает задача поиска возможностей снижения числа ошибок, при вычислении соответствий в локальных областях.

Ранее проведенные автором исследования показали эффективность перехода от обработки монохромного к цветному изображению, однако несмотря на увеличение диапазона сравниваемых значений за счет использования цветовой информации, сохраняется проблема обработки участков изображений расположены не в фокусе, объектов с большими

однородными областями, а также бесконечно удаленных объектов (например: небо). Такие области изображений практически не имеют разрывов (перепадов) по яркости, которые в свою очередь несут максимальное количество информации используемой при обработке изображения. Отсюда очевидно возникает задача поиска таких участков, что позволит исключить из обработки не информативные области и, следовательно, сократить количество ошибок и число итераций алгоритма.

В целях классифицирования точки как находящейся на перепаде яркости, изменение яркости, ассоциированное с данной точкой, должно быть существенно большим, чем изменение яркости в точке фона. В связи со спецификой локальных вычислений, способ определения «существенных», значений состоит в установлении порога. В свою очередь для количественного выражения изменения яркости используют понятия первой и второй производных.

Определение точки изображения как точки перепада происходит в том случае, если ее двумерная производная первого порядка превышает некоторый заданный порог. Связное множество таких точек в соответствии с заранее заданным критерием связности есть перепад яркостей, а протяженный перепад яркостей является контуром.

Один из подходов к связыванию точек контура состоит в анализе характеристик пикселей в небольшой окрестности каждой точки  $(x, y)$  изображения, которая была отмечена как контурная точка (точка перепада). Все точки, являющиеся сходными в соответствии с некоторыми заранее заданными критериями, связываются и образуют контур, состоящий из пикселей, отвечающих этим критериям. При таком анализе используются следующие два основных параметра для установления сходства пикселей контура: величина отклика оператора градиента и направление вектора градиента.

Вычисление первой производной цифрового изображения основано на различных дискретных приближениях двумерного градиента. Направление вектора градиента совпадает с направлением максимальной скорости изменения функции  $f$  в точке  $(x, y)$ .

Вычисление градиента изображения состоит в получении величин частных производных  $G_x = df/dx$  и  $G_y = df/dy$  для каждой точки. Один из способов нахождения первых частных производных  $G_x$  и  $G_y$  в конкретной точке состоит в применении градиентного оператора Собеля.

Для оператора Собеля, который выявляет горизонтальные и вертикальные контуры (перепады яркости), следует определить соответствующие маски для свертки с исходным изображением. Также можно изменить приведенные формулы таким образом, чтобы они давали максимальный отклик для контуров, направленных диагонально. Для вычисления величины градиента эти составляющие необходимо использовать совместно, определяя величину градиента приближенно через абсолютные значения частных производных. Обработка изображения оператором градиентов, а также последующая бинаризация результатов позволит составить карту вычислений.

Карту вычислений возможно использовать для обработки изображения при помощи динамических сканирующих окон. Данный процесс основывается на постепенном увеличении размеров окна, в том случае, если в зоне его сканирования оказывается недостаточное количество информации.

Данный подход позволяет снизить число ошибок обработки однородных областей, однако следует отметить, что по мере увеличения размеров окна, происходит «раздувание» границ объекта, которое происходит при размерах окна более  $50 \times 50$ , что искажает реальные контуры объекта.

Также следует отметить усреднение результатов сравнения областей исходя из специфики функций мер сходства, что приводит к снижению результативности обработки в случаях, когда число точек в сканирующем окне начинает превышать размерность диапазона возможных значений функции сходства.

Таким образом можно говорить, что существует возможность автоматического

определения размерности окна в некотором диапазоне, который определяется в зависимости от битности исходных данных.

В случае, когда размерность окна достигает возможного максимума не «набрав» в сканируемой области достаточного числа информации, следует произвести отсеивание данной точки, в связи с тем, что информация о ее положении в пространстве неоднозначно.

Отсеивание малоинформативных областей и переход к цветной обработке изображений в ходе вычислительного эксперимента позволило сократить число ошибок на карте диспаратности, а также уменьшить время обработки на 20% (с учетом затрат на вычисление значений локальных градиентов) по сравнению с полной обработкой изображения в 860 тысяч точек.

### Литература

1. Жук Д.В., Тузиков А.В. Реконструкции трехмерной модели по цифровым изображениям. // Информатика. – 2006. – № 1. – С. 16–26.
2. Шапиро Л., Стокман Дж. Компьютерное зрение / Пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с.
3. Волкович А.Н. Использование цветовых характеристик и функций градиента в задаче построения карт диспаратности // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых, Выпуск 1. Труды молодых ученых. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – С. 72–73.

УДК 519.7

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРОГО ПСЕВДОПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Б.Г. Мубаракوف

(Казанский (Приволжский) федеральный университет)

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Ш.Т. Ишмухаметов

(Казанский (Приволжский) федеральный университет)

Одной из наиболее важных проблем в криптографии и теории чисел является проблема определения по заданному натуральному числу  $n$ , является ли оно простым или составным. Процедура, решающая такую задачу, называется тестом простоты. Известно множество различных тестов простоты, среди которых наиболее распространенным является тест простоты Миллера–Рабина [1–3]. Составные числа, успешно проходящие тест Миллера–Рабина, называются строго псевдопростыми. Проблема изучения строго псевдопростых чисел имеет также важные приложения в теории чисел [4]. В работе мы изучим алгоритмы построения строго псевдопростых чисел и оценим их эффективность.

**Опр.1** Пусть  $a > 1$  – произвольное натуральное число. Назовем нечетное составное натуральное число  $n$   $a$ -псевдопростым или  $\text{psp}(a)$ , если выполняется формула

$$a^{n-1} \bmod n = 1 \quad (1)$$

Элемент  $a$  называется базой для псевдопростого числа  $n$ .

**Опр.2** Пусть  $a > 1$  – произвольное натуральное число. Назовем нечетное составное натуральное число  $n$  строго псевдопростым по базе  $a$  или  $\text{spsp}(a)$ , если число  $n$  успешно проходит один раунд теста Миллера–Рабина с базой  $a$ . Иначе говоря, выполняется одно из следующих условий:

1.  $a^u \equiv \pm 1 \pmod n$
  2.  $a^{u2^i} \equiv -1 \pmod n$  для некоторого  $i, 0 \leq i < s$ , (2)
- где  $n - 1 = 2^s \cdot u$ .

Обозначим через  $\psi_1$  наименьшее нечетное число, являющееся строго псевдопростым по базе 2 [1, 2]. Определим для произвольного натурального числа  $k$  число  $\psi_k$ , как наименьшее нечетное число, являющееся строго псевдопростым по множеству баз, состоящих из первых

$k$  простых чисел. Значения первых элементов последовательности  $\psi_k$  приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения последовательности  $\psi_k$  для  $k < 10$

$k$	1	2	3	4	5	6–9
$\psi_k$	2047	1373653	25326001	3215031751	2152302898747	3474749660383

Таким образом, чтобы проверить на простоту число, меньшее  $3,4 \cdot 10^{12}$  достаточно провести тест Миллера–Рабина, используя множество баз, состоящее из первых 6 простых чисел. Это число намного меньше, чем определяется средней вероятностью по теореме Рабина или числом  $(\log_2 n)^2$ , определяемым гипотезой Римана.

Рассмотрим, исследование строго псевдопростых чисел по базе 2, выполненное в статье [5] Померанса, Селфриджа и Вагстаффа 1980 года. Они сумели проверить все числа, не превышающие  $25 \cdot 10^9$  (выдающийся результат для 1980 года!) и нашли 4842 строго псевдопростых числа с базой 2. Ими также найдена нижняя граница для функции  $S_a(x)$  числа строго псевдопростых чисел, меньших  $x$  не являющихся простыми с базой  $a$ :

$$S_a(x) > \ln x / (4a \ln a).$$

Эта оценка доказывает, что число составных  $\text{spsp}(a)$  чисел бесконечно много, что является важным теоретическим результатом, однако с практической точки зрения слишком мала, так как, например, для  $x = 25 \cdot 10^9$  эта оценка составляет всего лишь 4,3 и много меньше действительного значения 4842.

Очевидно, что проверка чисел по нескольким базам уменьшает число чисел, являющихся строго псевдопростыми.

Алгоритм Померанса  $\text{etalt}$  [5] вычисления  $\text{spsp}$ -чисел по нескольким базам не отличается от выше описанного. Основная проверка условий (2) может быть выполнена в параллельном вычислении для нескольких баз, поскольку эти вычисления полностью независимы. Рассмотрим итоги этих вычислений при прежней границе  $B = 25 \cdot 10^9$ .

Напомним, что наименьшее  $\text{spsp}$ -число по трем базам равно 25 326 001. Рассмотрим остальные строго псевдопростыми числа, лежащие ниже границы  $25 \cdot 10^9$ . Таких чисел существует 13. Все они перечислены в следующей таблице и имеют некоторую специальную форму (табл. 2).

Таблица 2. Строго псевдопростые числа по трем базам 2,3,5

№	$n$	Разложение	Форма
1	25 326 001	2251·11251	$(k+1)(5k+1)$
2	161 304 001	7333·21997	$(k+1)(3k+1)$
3	960 946 321	11717·82013	$(k+1)(7k+1)$
4	1157 839 381	24061·48121	$(k+1)(2k+1)$
5	3215 031 751	151·751·28351	$(k+1)(5k+1)(189k+1)$
6	3 697 278 427	30403·121609	$(k+1)(4k+1)$
7	5 764 643 587	37963·151849	$(k+1)(4k+1)$
8	6 770 862 367	41143·164569	$(k+1)(4k+1)$
9	14 386 156 093	397·4357·8317	$(k+1)(11k+1)(21k+1)$
10	15 579 919 981	88261·176521	$(k+1)(2k+1)$
11	18 459 366 157	67993·271729	$(k+1)(4k+1)$
12	19 887 974 881	81421·244261	$(k+1)(3k+1)$
13	21 276 028 621	103141·206281	$(k+1)(2k+1)$

Из табл. 2 видно, что строго псевдопростые числа имеют специальную структуру, которая позволяет надеяться на получение быстрого алгоритма генерации строго псевдопростых чисел.

Также отметим, статью 1993 года Джаешке [6]. Он расширил последовательность  $\{\psi_k\}$

до 9 члена (табл. 1) и разработал новый эффективный алгоритм вычисления  $spr$ -чисел по одной и нескольким базам. Этот алгоритм основан на идее последовательного перебора пар простых чисел, троек простых чисел, четверок и т.д., произведение которых способно быть  $spr$ -числом. Однако, общая оценка алгоритма Джаешке сохраняется той же, что и в методе Померанса et al. и соответствует оценке  $O(B \ln B)$ .

**Вывод.** Таким образом, мы изучили и оценили эффективность разных алгоритмов построения псевдопростых чисел. Можно сказать что, несмотря на значительный период времени со дня постановки, особых сдвигов в решении проблемы построения строго псевдопростых чисел пока нет. Полученные результаты исследований позволяют надеяться на получение быстрого алгоритма поиска строго псевдопростых чисел.

### Литература

1. Rabin M. Probabilistic algorithm for testing primality// J.Numb.Theory. – 1980. – V. 12. – № 1. – P. 128–138.
2. Crandall R., Pomerance C. The prime numbers: a computational perspective. – 2-ed., Springer-Verlag, Berlin.
3. Ишмухаметов Ш.Т. Методы факторизации натуральных чисел. – Казань: КФУ, 2011. – 190 с.
4. Ishmukhametov S., Mubarakov B. On practical aspects of the Miller-Rabin Primarily Test // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – 13 p, to appear.
5. Pomerance, C. Selfridge, Wagstaff, S. The Pseudoprimes to  $25 \cdot 10^9$  // Math. Comput. – 1980. – P. 1003–1026.
6. Jaeschke G. On Strong Pseudoprimes to Several Bases // Math. Comput. – 1993. – V. 61. – P. 915–926.

УДК 004.942

## ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Д.С. Туляков

(Тамбовский государственный технический университет)

**Научный руководитель – к.т.н., доцент Т.А. Фролова**

(Тамбовский государственный технический университет)

При построении математических моделей нередко возникают случаи, когда некоторые входные величины не определены, и найти их численные значения не представляется возможным. Существует несколько подходов к раскрытию неопределенностей.

Широко используется вероятностный подход [1], в котором неопределенные параметры характеризуются функциями плотности распределения. Математические модели, в состав которых входят такие параметры, имеют названия вероятностных. В этом случае функции распределения строятся на основании накопленных статистических данных о поведении стохастических параметров. Трудность применяемой методики связана с необходимостью проведения большого числа экспериментов на объекте во время хода технологического процесса для определения параметров законов распределения стохастических величин.

Другой подход связан с использованием теории нечетких множеств [2] и уходит в сферу субъективной информации. Неопределенные параметры характеризуются функциями принадлежности, которые строятся на основе опросов экспертов. Модели, в которых неопределенные параметры характеризуются функциями принадлежности, получили название нечетких математических моделей. Недостатком этой методики является то, что для надежного построения функции принадлежности требуется мнение нескольких экспертов.

Это не всегда возможно.

На практике чаще всего информация о значении неопределенного параметра задается в виде интервального параметра [3].

Данная методика реализована на примере переработки фосфогипса. Фосфогипс это отход в производстве фосфорных удобрений.

Переработка фосфогипса на известь и серную кислоту осуществляется во вращающихся печах. Вращающаяся печь – промышленная печь цилиндрической формы с вращательным движением вокруг продольной оси, предназначенная для нагрева сыпучих материалов с целью их физико-химической обработки [4].

Разработана математическая модель процесса обжига во вращающейся печи [5, 6].

В математической модели есть неопределенные параметры, численные значения которых изначально неизвестны. Это степень черноты материала, теплоемкость материала и эмпирический коэффициент. Эти параметры предлагается задавать в виде интервальных значений. Следовательно, для решения математической модели процесса обжига во вращающейся печи необходимо решить интервальную математическую модель [7, 8].

В математической модели выходными параметрами являются распределение температур газа, материала и стенки по длине печи, но важным параметром для переработки фосфогипса является температура материала. Поэтому дальнейшие исследования будем проводить только для температуры материала.

Решение модели представляется в виде графика зависимости границ температуры материала по длине печи [9].

Распределение материала по длине печи точно определить не предоставляется возможным, из-за различных неопределенных параметров, поэтому находится интервал распределения температуры материала по длине печи. Этот интервал гарантирует, что температура материала будет находиться только внутри этой области, т.е. между нижней и верхней границей [10].

Для успешного ведения технологического процесса необходимо обеспечить заданную температуру материала в определенных точках в каждой печи. В условиях неопределенности параметров математической модели постановка задачи обеспечения заданного технологического режима формулируется следующим образом: для заданных условий окружающей среды, производительности установки, необходимо найти расход топлива в печи, при которых достигается выполнение технологических условий производства, т.е. интервал значения температуры на заданной длине печи, должен быть подмножеством интервала температуры, заданного технологом.

Таким образом, интервальная математическая модель процесса обжига фосфогипса дает возможность определить технологические режимы данного процесса оптимальным образом. Данная разработка является одним из модулей информационной системы управления процессом переработки фосфогипса.

### **Литература**

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. – М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2007. – 320 с.
2. Новак В., Перфильева И., Мочкрож И. Математические принципы нечеткой логики. – М.: Физматлит, 2006. – 352 с.
3. Добронец Б.С. Интервальная математика. – Красноярск, 2004. – 219 с.
4. Лисиенко В.Г., Щелоков Я.М., Ладыгичев М.Г. Вращающиеся печи: теплотехника, управление и экология: Справочное издание в 2-х книгах. Книга 2. – М.: Теплотехник, 2004. – 592 с.
5. Фролова Т.А., Туляков Д.С. Математическое моделирование процесса обжига во вращающихся печах // Информатика: проблемы, методология, технология: материалы XII Международной научно-методической конференции. – Воронеж. – 2012. – С. 424.

6. Фролова Т.А., Туляков Д.С. Раскрытие неопределенности в математической модели процесса обжига // Новые информационные технологии: материалы XIX Международной студенческой школы-семинара. – Судак. – 2012. – С. 113–114.
7. Фролова Т.А., Фролов С.В., Туляков Д.С. Решение интервальных математических моделей технологических процессов // Наука и образование. Инженерное образование. – 2012. – № 9. – С. 343–360.
8. Фролова Т.А., Д.С., Кутузов Д.В., Шиккульский М.И. Интервальная математическая модель процесса обжига во вращающейся печи при утилизации твердых промышленных отходов производства (на примере переработки фосфогипса) // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2012. – Т. 13. – № 3. – С. 573–577.
9. Туляков Д.С., Фролова Т.А. Расчет тепловых режимов вращающейся печи // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012615550. – 2012.
10. Туляков Д.С., Фролова Т.А. Определение профиля температур во вращающейся печи при интервальной неопределенности исходных данных // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012615091. – 2012.

УДК 519.7

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛУПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

**Ф.Ф. Шарифуллина**

(Казанский (Приволжский) федеральный университет)

**Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Ш.Т. Ишмухаметов**

(Казанский (Приволжский) федеральный университет)

Натуральное число называется полупростым, если оно является произведением двух простых чисел (возможно равных между собой). Обозначим через  $g(y)$  вероятность того, что случайно выбранное натуральное числа  $y$  является полупростым. В работе мы получим асимптотическую формулу для вычисления  $g(y)$  и оценим ее точность при различных значениях  $y$ .

Под гладкостью натурального числа  $n$  будем понимать возможность разложения этого числа в произведение большого числа простых сомножителей.  $B$ -гладкое число – это число, все простые делители которого ограничены сверху константой  $B$ . Понятие гладкости играет важную роль в теории чисел и криптографии.

Возможность использования этого понятия в криптографии основана на том, что сама процедура разложения числа на множители (факторизация целого числа) является трудоемкой вычислительной процедурой, требующей использования значительных вычислительных ресурсов (см. [3, 4]). Известный метод двухключевой криптографии RSA основан на трудноразрешимости задачи факторизации. Секретным ключом RSA является большое полупростое число.

В рамках определения гладкости простые числа являются совершенно не гладкими, а полупростые числа являются частично гладкими. Знание распределения гладких и частично гладких чисел на заданных интервалах нужны для оценок сходимости многих криптографических алгоритмов таких как, например, метод решета числового поля и алгоритм факторизации Ленстры на эллиптических кривых ([4], с.87, с.133). В статье [5] исследуются степенно-гладкие числа.

Пусть  $P = \{2 < 3 < \dots < p_k < \dots\}$  – упорядоченное множество всех простых чисел, а  $\pi(x)$  – количество простых меньших  $x$ . По теореме Чебышева ([1], с.87),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \cdot \ln x}{x} = 1$$

поэтому для больших  $x$  можно принять аппроксимацию  $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$

Уточнить эту формулу не представляется возможным, поскольку оценка погрешности этой формулы эквивалентно решению знаменитой проблемы Римана о распределении нулей  $\zeta$ -функции, которая находится в списке 7 крупнейших проблем тысячелетия [2].

Число полупростых чисел, меньших  $y$ , может быть точно вычислено по формуле

$$\pi^2(y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{y}} \left[ \pi\left(\frac{y}{p_k}\right) - k + 1 \right],$$

полученной И. Ноэломи Г. Паносом в 2005, и независимо Р. Вилсоном в 2006 [6]. Очевидно, эта формула не может быть использована для оценки числа полупростых чисел при больших  $y$ .

Функцию  $g(y)$  можно аппроксимировать рядом

$$g(y) \approx \sum_{p < \sqrt{y}} \frac{1}{p(\ln y - \ln p)}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по простым  $p < \sqrt{y}$ .

Нами получена асимптотическая формула для вероятностной функции  $g(y)$ :

$$g(y) = \frac{\ln \ln y}{\ln y} + \frac{0.25}{\ln y} - \frac{1.540}{\ln^2 y}. \quad (2)$$

Ниже мы привели значения  $g(y)$ , найденные по формулам (1) и (2) и их отношение:

$y$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	$10^9$	$10^{10}$
$g(y)$	0,3845	0,387	0,2551	0,2252	0,2015	0,1829	0,1681	0,1555	0,1448
$g^*(y)$	0,3166	0,2859	0,2517	0,2236	0,2012	0,1830	0,1680	0,1555	0,1448
Ratio	1,2148	1,0799	1,0135	1,0068	1,0015	0,9998	1,0003	1,0000	1,0001

Мы видим, что формула (2) очень точно отражает вероятностную функцию  $g(y)$  для больших  $y$ . Отметим также, что поскольку вероятность случайно выбранного натурального числа быть простым равна приблизительно  $1/\ln y$ , значит полупростых чисел несколько больше, чем простых (примерно в  $\ln \ln B$  раз на интервале, ограниченном константой  $B$ ).

### Литература

1. Чандрасегхаран К. Введение в аналитическую теорию множеств. – М.: Мир, 1974. – 187 с.
2. Derbyshire J. Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics, Joseph Henry Press, 2003. – 422 с.
3. Ишмухаметов Ш.Т. Методы факторизации натуральных чисел. – Казань: КФУ, 2011. – 189 с.
4. Бойко А.А., Зиятдинов Д.Б., Ишмухаметов Ш.Т. Об одном подходе к проблеме факторизации натуральных чисел // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 4. – С. 15–22.
5. Ишмухаметов Ш.Т., Шарифуллина Ф.Ф. О гладкостепенных элементах, Информационные технологии в системе социально-экономической безопасности России и ее регионов // Сб. трудов IV Всер. науч. конф. – Казань, 2012. – С. 128–132.
6. Eric W. Weisstein Semiprime [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mathworld.wolfram.com/Semiprime.html>, своб.
7. Shparlinski I. Anatomy of Integers and Cryptography [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://cosec.bit.uni-bonn.de/fileadmin/user\\_upload/teaching/08us/08us-cryptabit/Shparlinski\\_Anatomy-of-Integers-and-Cryptography.pdf](http://cosec.bit.uni-bonn.de/fileadmin/user_upload/teaching/08us/08us-cryptabit/Shparlinski_Anatomy-of-Integers-and-Cryptography.pdf), своб.
8. Sloane N.J.A. Sequences A083343 in «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://oeis.org//A083343>, своб.